カチェーリの制作

荒井真美＆豊田千弘

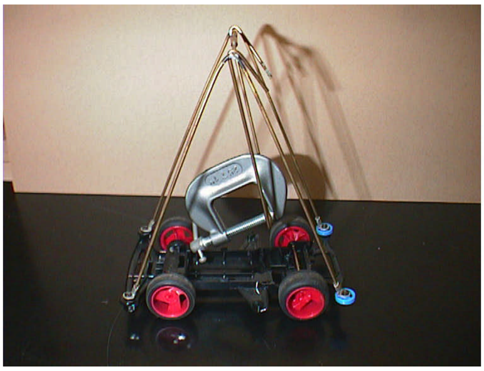
２００２・１１・４

目次

はじめに

　文化祭の出し物にと研究室の担当教官からロシア科学雑誌に載っていたカチェーリという乗り物を作るアイデアをいただきました。運動量保存則を卓上だけでなく実体験するのにちょうど良い教材でもありますし、なにしろその模型を見せてもらったときの不思議さと驚きを再現できればいいなと思い制作しました。

← 写真１　完成



↑写真２　模型

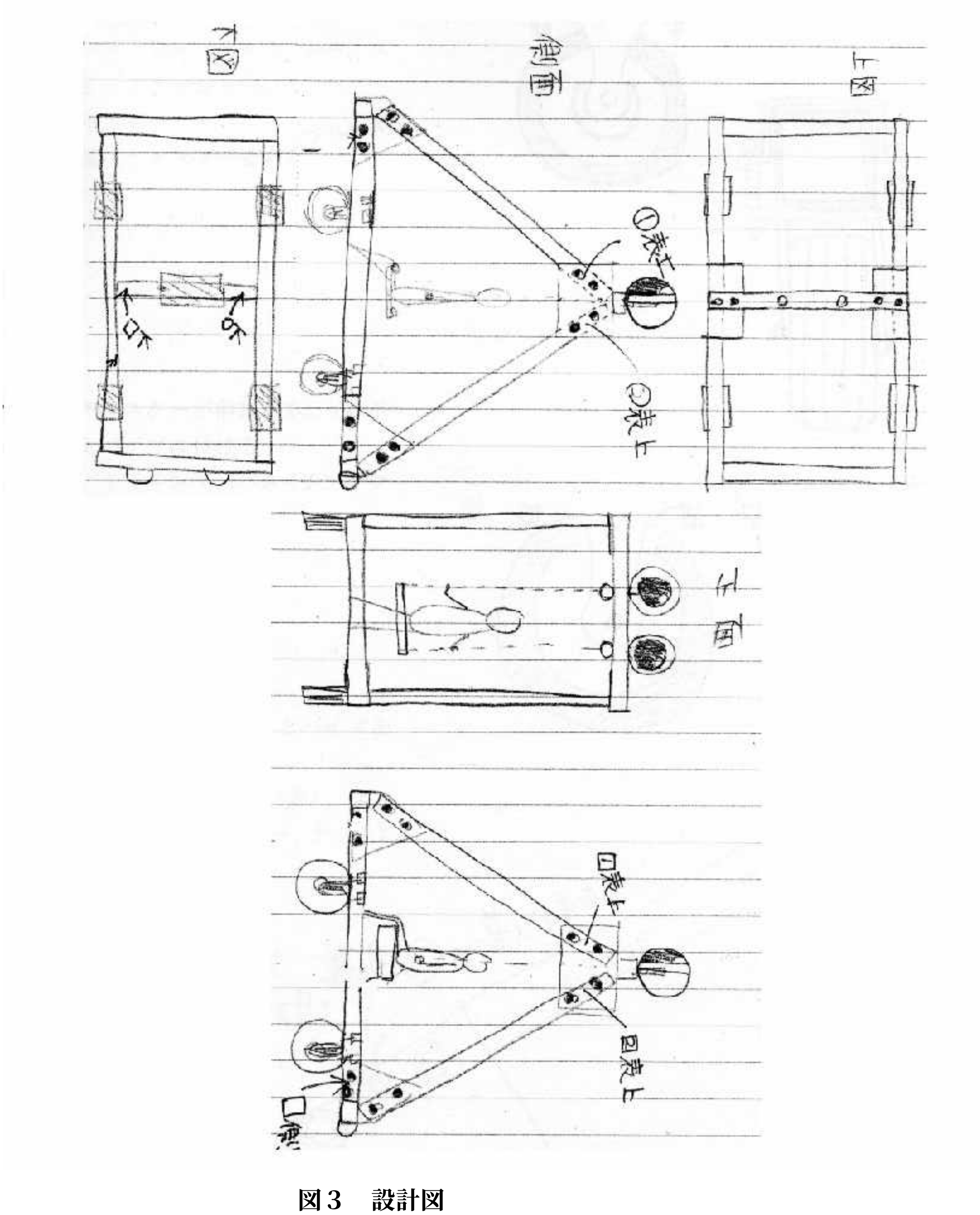
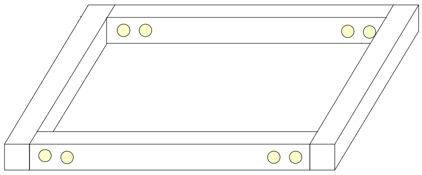
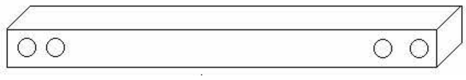
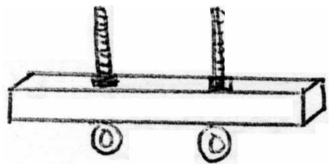
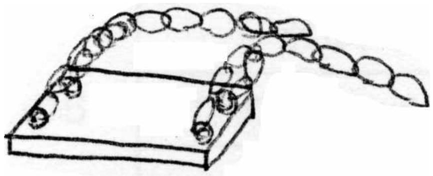
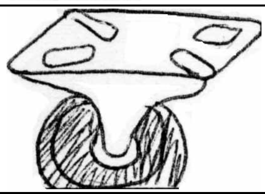
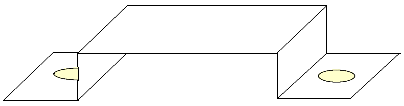
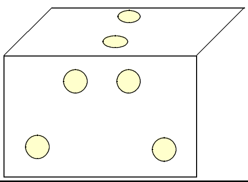
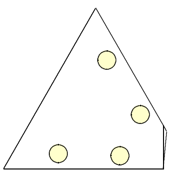
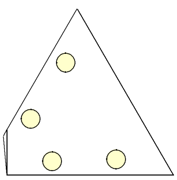
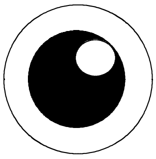


図３　設計図

必要な物リスト１

図	名前	個数
	溶接された長方形のパイプ **※パイプは建設用角パイプを使用し溶接、穴開けの加工をしました。**	1
	パイプ	4
	パイプネジ付き **※パイプに穴を開け、輪付きネジを付けました。**	1
	ブランコ（チェーン付き） **※板にはまな板を使用しました。**	1
	キャスター **※市販の物。**	4
	金具（キャスター止め用） **※市販の物。**	8
	金具（上用） **※アルミ板を加工しました。**	2
	金具（右用） **※アルミ板を加工しました。**	2
	金具（左用） **※アルミ板を加工しました。**	2

	目玉（欲しいのなら） **※目玉はビニールボールを２つに割り中にに綿と発砲スチロールを詰め込んで作りました。**	2

必要な物リスト２

サイズ（インチ）	部品	個数	備考
2分の１	ボルト	4	短い
		24	長い
	ワッシャー	52	
	スプリングワッシャー	28	
	ナット	52	
8分の３	ボルト	16	
	ワッシャー	16	
	スプリングワッシャー	16	
	ナット	32	
16分の５	ボルト	8	
	スプリングワッシャー	8	
	ナット	16	

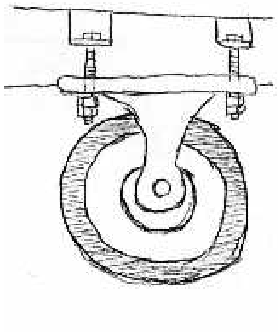
組み立て方

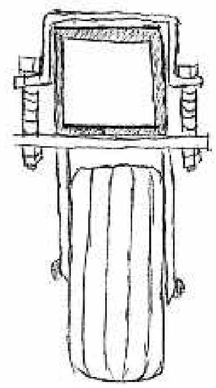
１．溶接された長方形のパイプにキャスターを付ける。

★３／８インチ（ボルト、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）

★キャスター

★金具（キャスター止め用）





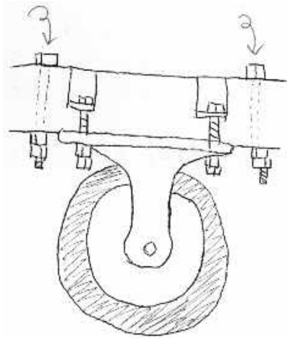
ポイント：ナットはダブル止め。

：最初にキャスターを付けてしまうのは後で付けると本体が重くて付けられなくなってしまうため。

２．キャスターが前後に動かないようにボルトをパイプに付ける。

★５／１６インチ

（ボルト、スプリングワッシャー、ナット）



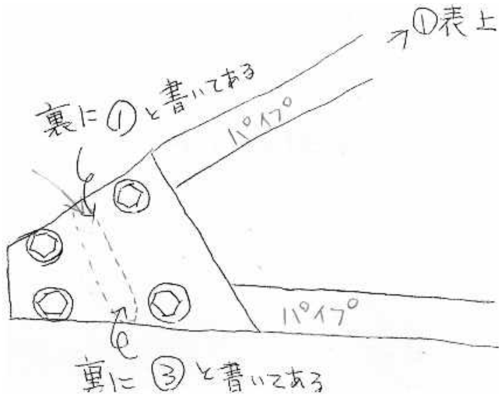
ポイント：ナットはダブル止め

３．○側の金具（右用、左用）でパイプと溶接された長方形パイプを取り付ける。

★１／２インチ（ボルト（長い方）、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）

★金具（右用、左用）

★パイプ



ポイント：ナットはダブル止め。

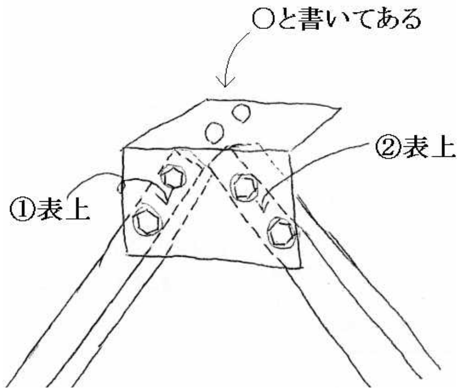
：アルミ（現存の物）金具を使用するのなら点線部に補強金具を４角全部に入れてください。

４．○側の金具（上用）を付ける

★１／２インチ

（ボルト（長い方）、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）

★金具（上用）



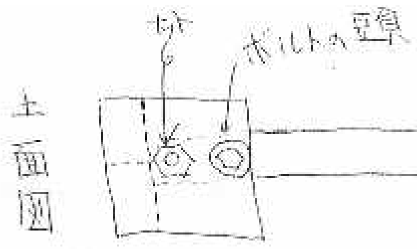
５．□側の金具（右用、左用）とパイプを取り付ける。
★１／２インチ（ボルト（長い方）、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）
★金具（右用、左用）
★パイプ

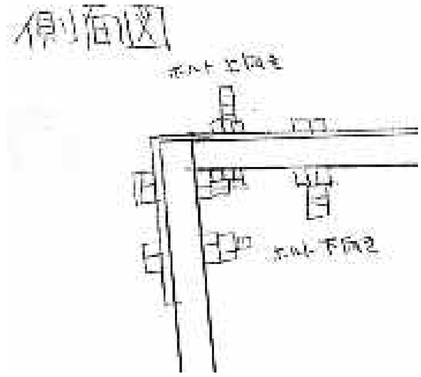
３と同様に組み立てる

６．□側の金具（上用）を付ける。
★１／２インチ（ボルト（長い方）、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）
★金具（上用）

４と同様に組み立てる

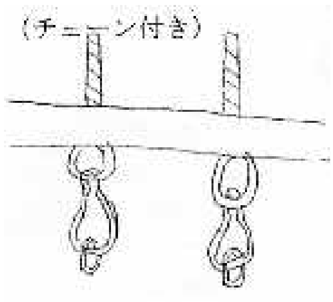
７．　パイプ（ネジ付き）を上に取り付ける。
★１／２インチ（ボルト（短い方）、ワッシャー、スプリングワッシャー、ナット）
★パイプ（ネジ付き）



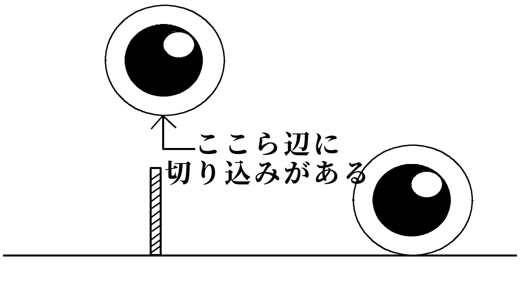


ポイント：外側のボルトは下から付ける

８．ブランコを付ける。
★ブランコ（チェーン付き）



９．目玉を付ける。
★目玉



改良案

①金具（上用、右用、左用）を鉄板で作る。（鉄板は金野先生に言えばもらえるはず）

☆アルミで作ってあるので横揺れの強度が弱いため。

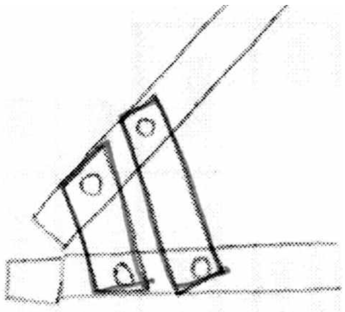
案１　精度があまりないので現存の物を型として同じ物を作る。

鉄板の上に現存の金具をのせ、穴と金具の形を記して、

穴を開けてから切る。

案２　長方形の鉄板２つの穴を開けた物を作る

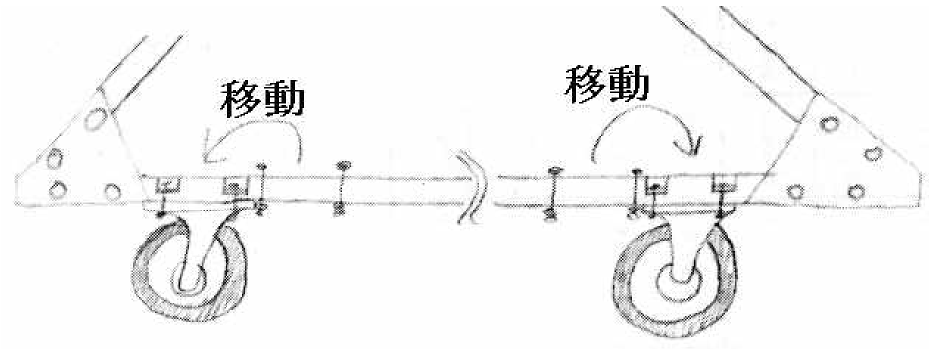
２つの穴の距離を測る、１３mm（　１／２インチ）の穴を開ける。



②タイヤの位置の幅をもっと広げる。

☆タイヤの位置が内側過ぎて漕ぐ際に倒れそうになるため。

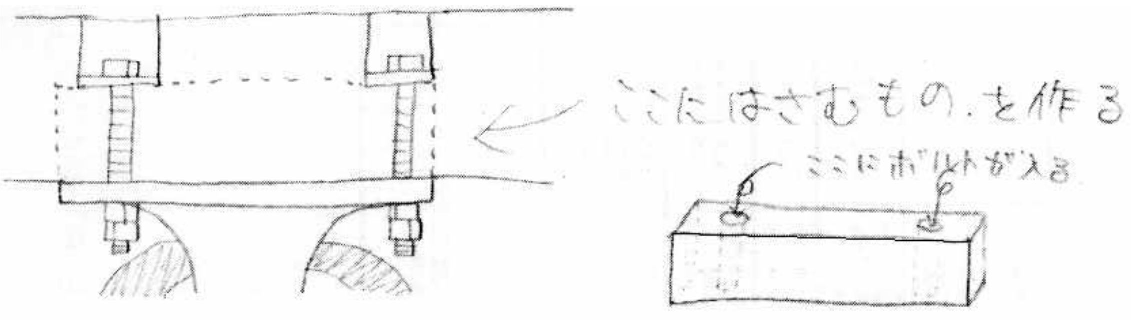
外側にある５／１６ボルトに合わせるくらい。



③タイヤ止め用金具の隙間を埋めるための木材が必要

☆タイヤ止め用の金具がナットを締める際にタイヤの向きと金具が曲がるため

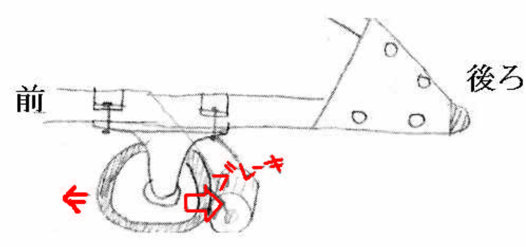
案１　堅めの木に穴を二つ開ける

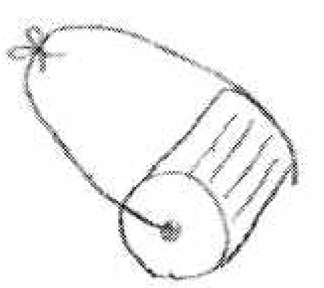


④進行方向へだけ進むように工夫をする

☆漕ぐときに前への力のみでなく後ろへの力も生じてしまうため

案２　進行方向への力だけを取り出すため。





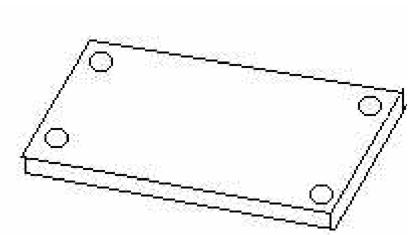
↑丸太のようなものにひもを取り付ける。

※もしかしたらバランスを崩して転倒してしまうかもしれない。

⑤お子さま（体重の軽い人）用に取り外し可能なおもりを作る。

案１　ブランコの板の下にナットで止められるような重りをつくる。

※ただし今のブランコに付いている金具はチェーン切りで切り落としたため山がつぶれている。新しくブランコの板を作る必要がある。



←このような形の重りをつくる。

文化祭での感想

思っていた通り子供にはかなりの人気がありました。恥ずかしがって乗らなかった子もいましたが特に小学校低学年の子供には何回も乗りに来てくれた子もいたほどでした。子供にとっては目がついていることで不気味な乗り物からかわいいモンスターになったのも人気の秘訣だったのかもしれません。（実際目玉を付けないでいたら一回来たことのあった子供に「おめめは付けないの？」と聞かれたくらいです。）　大人の方々も乗って楽しんでいただけたし、物理を知っている人などは説明を聞いて納得してくれた方もいたし、説明不足でよく分からなかった方もいたりしましたがなかなか盛況でした。

動かしてみていろいろ改良点が見つかりましたが、初めて大きな物を作ったにしてはまずまずの出来だったと思います。

ロシア科学誌の日本語訳

物理学演習
教科書のページとして

「奇妙なブランコ」

ロシア科学センター「クルチャトフ研究所」、クラーガ

全世界知能フェステバル「科学技術の進歩－２１世紀の世代へ」（本紙１９９８年９月号を参照）で、技術博物館員によって提供された面白い乗り物が、参加者の注目を浴びた。この乗り物は４輪のワゴンにブランコが組み立てられた物であった。ブランコを揺り動かすと、乗っている人はワゴンを動かすことができる。頑張ってブランコを漕ぐと、前進か或いは後退か、どちらかの方向に十分な速さで動く。

どうしてなんだろう？　一見すると、この乗り物の動きは力学法則に違反しているのである。即ち、閉じた系では重心の位置は不変でなければならない。従って、ブランコを動かしたとしてもワゴンは釣り合い位置に沿って前後に動くだけのはずである。それにも関わらず、ワゴンは前進するのである。

写真３　車輪の上に乗っている「奇妙なブランコ」は力学の授業における視覚教材としてだけではなく、遊具としても面白いものである。

現在、技術博物館の「遊びの技術」部局でデモンストレーションが行われているこの乗り物は、動く基台の上にある振り子に他ならない。物理学の装置としては、この乗り物は力学の基礎であるエネルギー変換の法則と運動量保存の法則を勉強するための素晴らしい特徴を持っている。

この乗り物の最も興味あるところは、その移動のパラドックス的な特性にある。一見して、運動量は存在しないし、道路と車輪の間の連結も存在しない。乗り物は閉じた系を成しているのである。そこでは内力のみが作用している。このような系の運動量は一定に保たれなければならない。系の内部にどのような力が作用していたとしても、そのどこかの部分が動いたとしても、全系の重心は不動でなければならない。

射撃において動かないはずの銃座は反力を受け、後に突き動かされる。この場合では、大砲と砲弾の総和した全運動量は保存され、ゼロに等しい。即ち、大砲の運動量をP_1，砲弾の運動量をP_2とすると、

$$P_1 + P_2 = 0$$

変形して、

$$P_1 = -P_2$$

この式で、マイナス符号は大砲と砲弾は正反対方向に動くことを意味している。

船の船首から船尾へと歩くか、その逆に歩くと、船は常に反対方向に動くことはよく知られている。全体の重心は位置を変えないのである。外力のみがこのような運動を変化させることができる。これらのことからは、このワゴンの運動、即ち何故ワゴンは動き出しそれも一方向にのみ動くのか、ということを全く理解することはできない。しかし、ワゴンの運動の初期を注意深く観察することにより、ワゴンの動きを簡単に説明することができる。ワゴンの運動の初期状態は些細な物と思われるが、実は非常に重要な特質を有しているのである。

最初、ワゴンを動かないようにしておくためには、ワゴンを押さえているか、車輪に車止めをかませる。それから地面を蹴るか、乗り物の枠を蹴って、乗り手がブランコを揺らし始める。この時点ではワゴンは地面にしっかりと留まっている。ブランコが振り上がると、系のポテンシャルエネルギーが大きくなる。

さて、ワゴンのその後の運動の解説に入ろう。とにかくワゴンは前進するのであるから、乗り物全体には運動量を変える外部の力が働いたはずである。それで、乗り手によって得られたエネルギーが乗り物を前進させることを強いたのである。

今まで述べたことは摩擦が完全にない場合にのみ正しい。勿論実際においては、振り子の振動は摩擦によって減衰し、ワゴンと共に振り子は遅かれ早かれ動かなくなる。ワゴンの車軸の摩擦力が振り子の取り付け部の摩擦より大きいならば、振り子が停止するまでに、ワゴンの前進運動は次第に重心の振動へと移る。逆の関係の時には、初めから振り子は振動することを停止し、ワゴンはゆっくりした速度で前進するであろう。その運動の最終段階では、振り子は小さい角度で傾いているであろう。

ブランコを揺り動かしている乗り手が、ワゴンが停止することなく動くことを保証するかのように思われる。しかし、これは思い違いである。ブランコ上の乗り手のエネルギーは摩擦にうち勝つために、振れの振幅を大きくするために、使われるであろう。が、系の全運動量は変わらないからである。

ワゴンを前進させる方法として、以下の３通りの方法が可能である。

１．ワゴンを押さえておく。乗り手がブランコを揺らし始め、その後ワゴンを解放する。
２．ワゴンは押さえない。地面を蹴って乗り手がブランコを揺らし始める。
３．ワゴンは押さえない。ワゴンの枠を蹴ることで乗り手がブランコを揺らし始める。

１番目の方法を、この記事で詳細に記述する。残りの２つの場合においてワゴンはどのように動くのか、読者自身で考えてみよう。

好奇心旺盛な方のための詳細

ブランコ付きワゴンの運動の特性について解明しよう。厳密に言うならば、このような

閉じた力学系の自由振動の記述は、微分方程式を解かなければならないほどの非常に複雑な問題である。しかし、保存法則を用いれば、その運動の単純な図形解析から運動の様子を理解することができる。

数学モデルとして質量M_1、腕の長さ（振動半径）Rの振り子が、質量M_2のワゴンに取り付けられたとする。ここで$M_2=M_1$（＝M）としておく。ワゴンは摩擦のない水平面を動くものとする。釣り合いの状態では、振り子とワゴンの重心は１本の鉛直線上にあるとする。振り子を水平状態まで傾け、それを放すと、振り子の錘とワゴンは、重心を相対的に反位相として振動する。これは運動量の保存則によるものであり、系の全重心は不変であるからである。

しかし、この系に前進運動を引き起こさせることができるのである。それも別の方法で。図１にそのような運動を示している。運動の１周期における振り子の速さと変位の依存性を図２ａに示している。ワゴンの運動の速さのグラフを図２ｂに示している。

記号は次の通りである。

V_T　ワゴンの地面に対する運動速度

V_o　ワゴンに対する振り子の相対速度

V_a　地面に対する振り子の絶対速度

V_{ao}　ワゴンが動き始める瞬間（最初に振り子が最下点に達した時）の振り子の速度

前述の方法１の場合なので、ワゴンは水平面上にあり、動かない障害物にその車輪の一組が突っ張っているとする。車輪を押さえている方に振り子を傾け、振り子にポテンシャルエネルギーW_{p1}を与え、離す（図１ａ）。振り子には重力Ｇと糸の張力F_1の２力が作用している。振り子が落下していく間、ワゴンは静止している。この間、糸の反作用力F_1は左側を向いているので、ワゴンを止め台に押し付けるからである。

その後、振り子はある速度V_{ao}で最下点に達する（図１ｂ）。この時の速度がV_{ao}とする。この最下点では錘のポテンシャルエネルギーW_{p1}は全て振り子の運動エネルギーW_{k1}となる。

$$W_{k1}=W_{p1}$$

振り子が最下点を通過すると、糸の反作用力F_1は右側を向くようになるので、ワゴンを加速し始める（図１ｂ→ｃ）。振り子の錘が右端の最も高い状態に達し、V_oはゼロとなる（図１ｃ）。それにも関わらず、振り子の運動エネルギーはゼロとはならない。これは次のように説明できる。振り子はワゴンと共に動いているので、V_aはV_oとV_Tの和

$$V_a=V_o+V_T$$

である。従って、$V_o=0$の点では

$$V_a=V_T$$

これ故、振り子の運動エネルギーとワゴンの運動エネルギーは同じくなる（振り子とワゴンの質量を同じとしているので）。この運動エネルギーをW_{k2}とする。振り子は右側の最上点にあるので、ポテンシャルエネルギーの余りW_{p2}を持っている。これらの間の関係はエネルギー保存法則で表現される。

$$2\cdot W_{k2}+W_{p2}=W_{p1}$$。

（原書では　2（W_{k2}＋W_{p2}）＝W_{p1}。　これは間違いと思う）

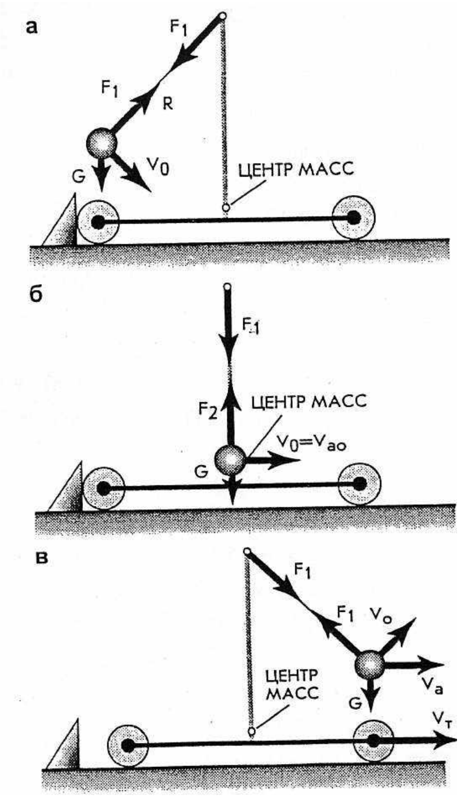


図１　振り子の振動の前半周期でのワゴンの運動。

ａ　振り子は左から右へ落下していく。車止めはワゴンが左側へ動かないようにしている。

ｂ　振り子は最下点に達し、全ての力の総和はゼロとなっており、未だワゴンは動かない。

ｃ　振り子は右側の最上点に達する。糸の反作用力F_1はワゴンをV_Tまで加速する。

振り子が右側の頂点に留まる（図１ｃ、図２Ⅲ）としたならば、運動量の保存則に応じて全系は一定の水平速度$V_a＝V_{ao}／2$で前進するであろう。振り子は最下点（図１ｂ、図２Ⅱ）で、速度がV_{ao}であるので、系の全運動量は振り子が持っており、M_1V_{ao}となる。図２Ⅲでは、振り子は最高点に留まっている瞬間なので、振り子の速度V_aとワゴンの速度V_Tは等しい。

$$V_T＝V_a$$

というのは、運動量保存より

$$M_1V_{ao}＝M_1V_a＋M_2V_T$$

従って、$M＝M_1＝M_2$としているので、

$$V_a＝V_{ao}／2$$

となるからである。

が、振り子は元の道を落下し、最下点に向かう間（図２Ⅲ→Ⅳ）、糸の張力の反作用力は右側を向き続けているので、ワゴンはワゴンの運動方向に加速される。振り子のポテンシャルエネルギーはワゴンの運動エネルギーに転換し続ける。

振り子が最下点に再び戻り落ちた時（図２Ⅳ）、そのV_aはゼロとなり、ワゴンは$V_T＝V_{ao}$の速度となる。これらのことは以下の通り証明される。運動量保存則により

$$M_1V_a＋M_2V_T＝M_1V_{ao}$$

エネルギー保存則により

$$M_1V_a^2／2＋M_2V_T^2／2＝M_1V_{ao}^2／2$$

この２式と、仮定$M＝M_1＝M_2$より

$$V_a\cdot V_T＝0$$

明らかにV_Tはゼロでないので、

$$V_a = 0$$

ワゴンの運動エネルギーは最初に持ち上げられた振り子のポテンシャルエネルギーに等しくなる。即ち、最初に振り子の持っていたポテンシャルエネルギーW_{p1}は全てワゴンの運動エネルギーに転化することになる。だが、ここまでの過程で、エネルギー交換は完了しない。ワゴンは右へ動き続けるので、振り子は左側に傾きながら上昇し、糸の張力の反作用力はワゴンを減速し始める（図２Ⅳ→Ⅴ）。

左側に最も大きく傾いた時（図２Ⅴ）、振り子のV_oは再びゼロとなり、V_aはワゴンの速度V_Tと等しくなる。系におけるエネルギーの相関関係は振り子が右端に位置したときと完全に類似している。振り子は左端から落下しながら（図２Ⅴ→Ⅵ）、糸の反作用力が左側を向いているので、振り子はワゴンを減速し続ける。そして、振り子は最下点に達し、その速度はV_{ao}となり、ワゴンの速度$V_T = 0$となるので、ワゴンは停止する（図２Ⅵ）。というのは、図２のⅡからⅥの間で系は完全に孤立しており、ⅡとⅥは同じ状態であるからである。サイクルが続き、２番目の段階が始まり、繰り返される。ワゴンの運動速度はサイン法則に従って変化する（図２ｂ）。

運動量とエネルギーの保存法則から、振り子の傾き角度に対するワゴンに相対的な振り子の速度とワゴン自信の依存性を見いだすことは困難ではない。

$$V_T = (V_{ao} - V_o \cdot \cos\alpha)/2,$$
$$V_o^2 = (V_{ao}^2 - 4GR(1-\cos\alpha))/(1+\sin^2\alpha)$$

ここで、

V_T　ワゴンの地面に対する速度

V_o　ワゴンに相対的な振り子の速度

V_{ao}　系の運動が開始時の振り子の初期速度（振り子が最初に最下点に達した時）

G　重力加速度

R　振り子の半径

α　垂直軸に対する振り子の傾き角度

である。これらの方程式の導出は読者自身でやってみたまえ。

（証明）更に以下のような変数を定義する

V_a　振り子の地面に対する速度

β　V_aの水平軸に対する傾き角度

V_oは糸の方向に常に垂直であるが、V_aは

$$V_a = V_o + V_T \quad （ベクトル表記） \qquad (1)$$

なので、

$$V_a \cdot \cos\beta = V_T + V_o \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$
$$V_a \cdot \sin\beta = V_o \cdot \sin\alpha \qquad (3)$$

エネルギー保存法則から

$$MV_{ao}^2/2 = MV_T^2/2 + MV_a^2/2 + MgR(1-\cos\alpha) \qquad (4)$$

運動量保存法則より

$$MV_{ao} = MV_T + MV_a \cdot \cos\beta \qquad (5)$$

（5）式に（2）式を代入して、

$$V_{ao} = V_T + V_T + V_o \cdot \cos\alpha$$

よって

$$V_T = (V_{ao} - V_o \cdot \cos\alpha) / 2 \qquad (6)$$

（2）、（3）より

$$V_a^2 = (V_T + V_o \cdot \cos\alpha)^2 + V_o^2 \cdot \sin^2\alpha \qquad (7)$$

（7）を（4）に代入して

$$V_{ao}^2 = V_T^2 + (V_T + V_o \cdot \cos\alpha)^2 + V_o^2 \cdot \sin^2\alpha + 2gR(1 - \cos\alpha) \qquad (8)$$

（8）に（6）を代入して整理し、V_o^2について求めると

$$V_o^2 = (V_{ao}^2 - 4gR(1 - \cos\alpha)) / (1 + \sin^2\alpha) \qquad (9)$$